★ Lycée Laymoune ★ 2ème Bac PC

Devoir n° 1
Modèle n° 2

Semestre : I [2021/2022]

Exercice 1

1) Classer par ordre croissant les nombres : $a=\sqrt[3]{2}$; $b=\sqrt[4]{2}$ et $c=\sqrt{2}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(E) \cdot 4\sqrt{2} + \left((\sqrt{2}-1)x - x^2 \right)^5 = 0$

3) Calculer :

ⓐ $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{\sqrt[3]{3x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x^2+1} - 2}$ ⓑ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+5} - \sqrt[3]{5}}{\sin(x)}$

4) Montrer que l'équation : $\sqrt{3}\,x^5 - \sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{6}\,x - 1 = 0$ admet une solution dans : $]0;1[$

Exercice 2

Soit g la fonction définie par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad g(x) = 3\sqrt{x} - x^2.$$

1°/ Vérifier que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$ $g'(x) = \dfrac{3 - 4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

2°/ Calculer : $g'(1)$ puis déterminer une équation de la tangente au point $x_0 = 1$.

3°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $g'(x) = 0$.

4°/ Montrer que g admet un extremum au point d'abscisse $x_0 = \sqrt[3]{\dfrac{9}{16}}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{3x-1}{5x-10}$

1°/ Déterminer D l'ensemble de définition de f.

2°/ étudier la continuité de f sur $I =]2;+\infty[$

3°/ f est-elle continue au point $x_0 = 2$? (justifier)

4°/ Soit h la restriction de f sur $I =]2;+\infty[$.

4°-a) Mq h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J.

4°-b) Comparer $h^{-1}(1)$ et $h^{-1}(2)$.

4°-c) Déterminer J et calculer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

4°-d) Dresser le tableau de variation de h^{-1} sur J.

5°) Calculer $h(3)$ et $(h^{-1})'\left(\frac{8}{5}\right)$.

• ★ • ★ • ★ • ★ •

2ème Bac. Science — (2021 - 2022) — ⟨Semestre.1⟩

Correction du DS [modèle] n°2

ex.1 1| $a = \sqrt[3]{2}$; $b = \sqrt[4]{2}$ et $c = \sqrt[2]{2}$

$12 = 3\times 4$ est un multiple (مضاعف) de : 3 ; 4 et 2 donc :

$a^{12} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{12} = \sqrt[3]{2}^{\,3\times 4} = \left(\sqrt[3]{2}^{\,3}\right)^4 = 2^4$

(car : $\sqrt[n]{x}^{\,n} = x$ si $x \geq 0$)

$b^{12} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^{12} = \left(\sqrt[4]{2}^{\,4}\right)^3 = 2^3$

$c^{12} = \left(\sqrt[2]{2}\right)^{2\times 6} = 2^6$

. on a par ordre croissant ↗ :

$2^3 < 2^4 < 2^6$ donc $b^{12} < a^{12} < c^{12}$

et comme a ; b et c sont positifs

alors : $\boxed{b < a < c}$

Req : $\forall x \geq 0 \quad \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

2| (E) : $4\sqrt{2} + \left((\sqrt{2}-1)x - x^2\right)^5 = 0$

$\Leftrightarrow \left((\sqrt{2}-1)x - x^2\right)^5 = -4\sqrt{2}$

on remarque que : $(\sqrt{2}-1)x - x^2 < 0$

(car : $-4\sqrt{2} < 0$)

Le signe de : $(\sqrt{2}-1)x - x^2$:

on a : $(\sqrt{2}-1)x - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left((\sqrt{2}-1) - x\right)x = 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}-1$ ou $x = 0$

x	$-\infty$		0		$\sqrt{2}-1$		$+\infty$
$(\sqrt{2}-1)x - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(−) (−)

donc $D_E =]-\infty ; 0[\cup]\sqrt{2}-1 ; +\infty[$

Soit $x \in D_E$; on a :

$(E) \Leftrightarrow -\left((\sqrt{2}-1)x - x^2\right)^5 = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left(-(\sqrt{2}-1)x + x^2\right)^5 = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow -(\sqrt{2}-1)x + x^2 = \sqrt[5]{4\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{2}-1)x = \sqrt{2}$

(car : $\sqrt[5]{4\sqrt{2}} = \sqrt[5]{2^2\sqrt{2}} = \sqrt[5]{\left((\sqrt{2})^2\right)^2\sqrt{2}}$

$= \sqrt[5]{\sqrt{2}^{\,4} \times \sqrt{2}} = \sqrt[5]{\sqrt{2}^{\,5}} = \sqrt{2}$)

$\Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{2}-1)x - \sqrt{2} = 0$

$\Delta = (\sqrt{2}-1)^2 - 4(-\sqrt{2})$

$= \sqrt{2}^{\,2} - 2\sqrt{2} + 1^2 + 4\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}^{\,2} + 2\sqrt{2} + 1^2 = (\sqrt{2}+1)^2 > 0$

deux solutions :

$x_1 = \dfrac{\sqrt{2} - 1 - (\sqrt{2}+1)}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \in D_E$

$x_2 = \dfrac{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \in D_E$

l'ensemble des solutions :

$S_E = \{-1 ; \sqrt{2}\}$

3| ⓐ $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{\sqrt[3]{3x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x^2+1} - 2}$

directement on trouve : " $\dfrac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{\sqrt{3+1} - 2}$ "

c-à-d : " $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}^{\,3}} - \sqrt{3}}{2-2} = \dfrac{0}{0}$ " F. I

on a :

$$\frac{\sqrt[3]{3x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+1}-2} = \frac{\left(\sqrt[3]{3x}^3-\sqrt{3}^3\right)\left(\sqrt{x^2+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}^2-2^2\right)\left(\sqrt[3]{3x}^2+\sqrt{3}\sqrt[3]{3x}+\sqrt{3}^2\right)}$$

$$= \frac{(3x-3\sqrt{3})\left(\sqrt{x^2+1}+2\right)}{(x^2-3)\left(\sqrt[3]{3x}^2+\sqrt[3]{3x}\sqrt{3}+3\right)}$$

$$= \frac{3(x-\sqrt{3})\left(\sqrt{x^2+1}+2\right)}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\left(\sqrt[3]{3x}^2+\sqrt[3]{3x}\sqrt{3}+3\right)}$$

donc :

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\sqrt[3]{3x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+1}-2} = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{3\left(\sqrt{x^2+1}+2\right)}{(x+\sqrt{3})\left(\sqrt[3]{3x}^2+\sqrt[3]{3x}\sqrt{3}+3\right)}$$

$$= \frac{3\times(2+2)}{2\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{(\sqrt{3})^3}^2+\sqrt[3]{\sqrt{3}^3}\times\sqrt{3}+3\right)}$$

$$= \frac{3\times 4}{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}^2+\sqrt{3}\times\sqrt{3}+3\right)} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{5}}{\sin(x)} = "\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{5}}{0}"$ F.I

on a : $\frac{\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{5}}{\sin(x)}$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{5}\right)^3}{\sin(x)\left[\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^2+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{x+5}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{x+5-5}{\sin(x)\left(\sqrt[3]{x+5}^2+\sqrt[3]{5(x+5)}+\sqrt[3]{5}^2\right)}$$

$$= \frac{x}{\sin(x)} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x+5}^2+\sqrt[3]{5(x+5)}+\sqrt[3]{5}^2}$$

on sait que : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

donc : $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{5}}{\sin(x)} =$

$$= 1 \times \frac{1}{\sqrt[3]{5}^2+\sqrt[3]{5}^2+\sqrt[3]{5}^2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{3\sqrt[3]{25}}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{5^2}\times\sqrt[3]{5}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{5}}{3\times\sqrt[3]{5^3}} = \boxed{\frac{\sqrt[3]{5}}{15}}$$

4) posons : $f(x) = \sqrt{3}x^5 - \sqrt{2}x^3 + \sqrt{6}x - 1$

f est continue sur $\mathbb{R}$

donc elle est continue sur $[0;1]$

on a : $f(0) = -1 < 0$

$f(1) = \underbrace{\sqrt{3}-\sqrt{2}}_{>0} + \underbrace{\sqrt{6}-1}_{>0} > 0$

donc : $f(0)\times f(1) < 0$

d'après T.V.I l'équation $f(x)=0$ admet une solution dans $]0;1[$

---

ex.2 $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g(x) = 3\sqrt{x} - x^2$

1°/ $(\forall x>0) \quad g'(x) = \left(3\sqrt{x}-x^2\right)'$

$$= 3\times\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2x(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{(\forall x>0)\quad g'(x) = \frac{3-4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}$$

2°/ $g'(1) = \frac{3-4\times1\sqrt{1}}{2\times\sqrt{1}} = \frac{3-4}{2} = \boxed{\frac{-1}{2}}$

une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_g)$ au point d'abscisse $x_0 = 1$ est :

$$y = g'(1)(x-1) + g(1)$$

$$y = -\frac{1}{2}(x-1) + 3 - 1$$

donc : $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}$

3°/ Soit $x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3 - 4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 0$ et $x > 0$

$\Leftrightarrow 3 - 4x\sqrt{x} = 0$ et $x > 0$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x} = \frac{3}{4}$ et $x > 0$

on a : $x\sqrt{x} = \sqrt{x}^2 \times \sqrt{x} = (\sqrt{x})^3$

donc : $x\sqrt{x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x}^3 = \frac{3}{4}$

ce qui donne : $\sqrt{x} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

donc : $\sqrt{x}^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^2 = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{16}}$

donc : $x = \sqrt[3]{\frac{9}{16}}$ est la solution de $g'(x) = 0$.

4°/ le tableau de signe de $g'(x)$:

x	0		$\sqrt[3]{9/16}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

g' s'annul en $\sqrt[3]{\frac{9}{16}}$ et change de signe en ce point donc g admet un extremum (valeur maximal) au point d'abscisse $x = \sqrt[3]{\frac{9}{16}}$

---

ex. 3 $f(x) = \frac{3x - 1}{5x - 10}$

1°/ $x \in D \Leftrightarrow 5x - 10 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{10}{5}$

donc : $D = \mathbb{R} - \{2\}$

2°/ f est une fonction rationnelle donc f est continue sur D

et comme $I \subset D$ (car $2 \notin I$)

donc f est continue sur I.

Req : $D =]-\infty; 2[\cup \underbrace{]2; +\infty[}_{I}$

donc $I \subset D$

3°/ non car ; f n'est pas définie en 2. ($2 \notin D$)

4°/ on a : $\forall x \in I =]2 + \infty[$; $h(x) = \frac{3x - 1}{5x - 10}$

4°-a/ h est continue sur I.

$(\forall x \in I)$; $h'(x) = \left(\frac{3x-1}{5x-10}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -10 \end{vmatrix}}{(5x-10)^2}$

$= \frac{3(-10) - 5(-1)}{(5x-10)^2} = \frac{-25}{(5x-10)^2} < 0$

donc h est strictement ↘ sur I

donc h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $J = h(I)$.

4°-b/ on a h est str ↘

donc h^{-1} est aussi str ↘

Comme $\begin{cases} 1 < 2 \\ h^{-1} \searrow (\text{str}) \end{cases}$ alors : $h^{-1}(1) > h^{-1}(2)$

4°-c/ $J = h(]2 + \infty[)$

$=]\lim_{x \to +\infty} h(x) ; \lim_{x \to 2^>} h(x)[$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x-1}{5x-10} = \frac{3}{5}$

et on a :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$5x-10$		$-$	0	$+$	

donc : $\lim_{x \to 2^>} (5x - 10) = 0^+$

donc : $\lim_{x \to 2^>} h(x) = \text{"}\frac{3 \times 2 - 1}{0^+}\text{"} = +\infty$

ainsi : $J =]\frac{3}{5}; +\infty[$

Calcul de $h^{-1}(x)$:

Soient $x \in]\frac{3}{5};+\infty[$ et $y \in]2;+\infty[$

$h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = h(y)$

$\Leftrightarrow \frac{3y-1}{5y-10} = x \Leftrightarrow 3y-1 = x(5y-10)$

$\Leftrightarrow y(3-5x) = 1-10x$

$x > \frac{3}{5}$ donc $5x > 3$ donc $3-5x \neq 0$

on trouve : $y = \frac{1-10x}{3-5x}$

$(\forall x \in J)$ $h^{-1}(x) = \frac{1-10x}{3-5x}$

4°-d) $h \searrow$ sur I donc $h^{-1} \searrow$ sur J

tableau de variation de h^{-1} sur J

x	$\frac{3}{5}$ $\quad\quad$ $+\infty$
h^{-1}	$+\infty$ $\searrow$ 2

5°) $h(3) = \frac{3\times3-1}{5\times3-10} = \frac{8}{5}$

on a : $(h^{-1})'(\frac{8}{5}) = (h^{-1})'(h(3))$

$= \frac{1}{h'(3)}$

$\left(\text{car : } (h^{-1})'(h(a)) = \frac{1}{h'(a)}\right)$

on a : $h'(3) = f'(3) = \frac{-25}{(5\times3-10)^2}$

$= \frac{-25}{(5)^2} = -1$

donc : $(h^{-1})'(\frac{8}{5}) = \frac{1}{-1} = \boxed{-1}$

★ ★ ★